Blaise Pascal:
Kúpszeletek származtatása

Definíciók

Ha egy kör síkján kívül eső pontot összekötünk a kör kerületének egy pontjával, majd az így kapott egyenest mindkét irányban a végtelenig meghosszabbítjuk, majd az egyenest végigmozgatjuk a kör kerületén úgy, hogy az első pont mozdulatlan marad, akkor azt a felszínt, amelyet a végtelen egyenes teljes körbefordulása során súrol, kúpfelszínnek nevezzük. A kúpfelszínen belül lévő végtelen teret kúpnak, a kört a kúp alapjának, a mozdulatlan pontot a kúp csúcsának nevezzük. A kúpfelszínnek azt a részét, amely a csúcsból kiindulva az alapig és azon túl a végtelenbe tart, fél kúpfelszínnek nevezzük. A felvett egyenest, a körforgás bármely helyzetében, vertikálisnak nevezzük.[1]

1. következmény

Ebből evidens módon következik, hogy ha a csúcsból egy végtelen egyenest húzunk a kör kerületének vagy a kúpfelszínnek bármely pontján keresztül, akkor ez a végtelen egyenes teljes egészében a kúpfelszínre esik, azaz vertikális lesz.

2. következmény

Ha felveszünk két pontot a kúpfelszínen, és ha az őket összekötő végtelen egyenes keresztülhalad a csúcson, akkor ez az egyenes teljes egészében a kúpfelszínre esik, tehát vertikális lesz. Ám ha nem halad keresztül a csúcson, akkor a két felvett ponton kívül az egyenes egyetlen pontja sem fog a kúpfelszínre esni. Ekkor a teljes egyenes részben a kúpon belülre, részben a kúpon kívülre esik.

3. következmény

Ebből evidens módon következik, hogy három vertikális nem eshet egy síkra, mert az alapkör kerületén felvett három pont nem eshet egy egyenesre.

4. következmény

Egy bármilyen módon felvett végtelen sík tehát szükségszerűen metszeni fogja a kúpfelszínt valamilyen helyzetben, mivel bármely három vertikálisból egy szükségszerűen metszi ezt a síkot. Ezt a metszetet nevezzük kúpszeletnek.

---

1 Jelen esetben megtartottuk a pascali terminológiát, amely láthatóan nem azonos a maival. A kúpfelszínt *(superficies conica)* a mai matematikai nyelvben kúppalástnak, a vertikálist *(verticalis)* alkotónak hívjuk. Megjegyzendő, hogy Pascal eltekint a nem köralapú kúpoktól, és hogy meghatározása szerint a kúp egy végtelen kettőskúp (a ford.).

Blaise Pascal: *Kúpszeletek származtatása*
***Különbség*, XIII. évf. / 1. szám | 2013 május, 19-23. o.**

Megjegyzés

Egy sík hatféle módon metszhet egy kúpfelszínt. Ha a sík és a kúp egyetlen közös pontja a kúp csúcsa, akkor a kúpszelet egy pont; ha a sík áthalad a csúcson és egy vertikális mentén érinti a kúppalástot, akkor a kúpszelet egy egyenes; ha a sík áthalad a csúcson és a teljes kúpfelszínt két egyenlő részre osztja, akkor a kúpszelet egy szög; ha a sík nem halad keresztül a csúcson és egyik vertikálissal sem párhuzamos, akkor a kúpszelet egy ellipszis, mert visszatér önmagába; ha újra csak nem halad keresztül a csúcson, de egy vertikálissal párhuzamos, akkor a kúpszeletet parabolának nevezzük; és ha a sík megint csak nem halad keresztül a csúcson és két vertikálissal párhuzamos, akkor ennek a kúpszeletnek hiperbola a neve. Hatfajta kúpszelet van tehát: a pont, az egyenes, a szög, az ellipszis, a parabola és a hiperbola.

2. definíció

Egy egyenest akkor mondunk egy pont felé tartónak, ha a szükséges mértékben meghosszabbítva eléri ezt a pontot. Egy egyenest akkor mondunk egy másik egyenesen végtelen távolságban lévő pont felé tartónak, ha párhuzamos ezzel a másik egyenessel.

3. definíció

Két vagy több egyenest mindig egy ponton átmenőknek mondunk, bármilyen helyzetben legyenek is egymáshoz képest, véges távolságban, ha egy pontban metszik egymást, és végtelen távolságban, ha párhuzamosak.

4. definíció

Azt a végtelen egyenest, amely a kúpszelet síkján fekszik, és amely egyetlen pontban metszi a kúpszeletet monoszekánsnak nevezzük.

5. definíció

Azt a végtelen egyenest, amely egy kúpszelet síkján fekszik, és amely nem metszi a kúpszeletet, hacsak végtelen távolságban nem, és amely párhuzamos egyes monoszekánsokkal, aszimptotának nevezzük.

6. definíció

Azt a végtelen egyenest, amely az alapkör síkján fekszik, és amely érinti vagy metszi annak kerületét, körhöz tartozó egyenesnek nevezzük.

Következmény

Ebből evidens módon következik, hogy ha a szem a kúp csúcsában helyezkedik el, és ha a tárgy a kúp alapkörének kerülete, és ha a vászon *(tabella)* maga a sík, amely így vagy úgy metszi a kúp felszínét, akkor a kúpszelet, amelyet e sík a kúpfelszínen létrehoz, legyen az pont, egyenes, szög, ellipszis, parabola vagy hiperbola, a kör kerületének képe lesz.

Következmény

Ugyanezen feltételek mellett, ha a vászon síkja nem halad keresztül a csúcson és egyetlen vertikálissal, azaz egyetlen sugárral *(radius)* sem párhuzamos, tehát ellipszist határoz meg, akkor nyilvánvaló, hogy az alapkör kerületének minden pontja rávetíti képét a kúpszelet vásznának síkjára véges távolságban.

Megjegyzés

Ebből következik, hogy az ellipszis visszatér önmagába, és véges teret fog körbe.

Következmény

Ugyanezen feltételek mellett, ha a vászon síkja egy vertikálissal, azaz egy sugárral párhuzamos, tehát parabolát határoz meg, nyilvánvaló, hogy az alapkör kerületének minden pontja rávetíti képét véges távolságban a kúpszelet vásznának síkjára, kivéve egy pontot, amelynek nem lesz képe, hacsak végtelen távolságban nem.

Megjegyzés

Ebből következik, hogy a parabola a végtelenbe tart és végtelen teret határoz meg, noha az alapkör kerületének képe, amely véges, és amely véges teret fog körbe.

Következmény

Ugyanezen feltételek mellett, ha a vászon síkja két vertikálissal párhuzamos, tehát hiperbolát határoz meg, nyilvánvaló, hogy az alapkör kerületének minden pontja rávetíti képét véges távolságban a képsíkra, azaz a vászonra, kivéve két pontot, amelyek képe a párhuzamosság következtében nem jelenik meg, hacsak végtelen távolságban nem. Ezeket a kör képnélküli pontjainak is nevezzük, vagy – a hiperbolára vonatkoztatva – hiányzó pontoknak.

1. megjegyzés

Ebből következik, hogy a hiperbola a végtelenbe tart, és két részből áll, amelyek mindegyike végtelen teret határoz meg. A két fél-hiperbolából az egyik az alapkör kerülete egyik felének, a másik pedig a másik felének a képe. Így a kerület minden pontja rávetíti képét vagy az egyik, vagy a másik fél-hiperbolára, kivéve két pontot, amelyek képe egyik hiperbolán sem található, hacsak végtelen távolságban nem.

2. megjegyzés

A három előző következményből nyilvánvalóvá válik, hogy a hiperbolában kettő, a parabolában egy hiányzó pont van, míg az ellipszisben egy sincs.

Következmény

Ugyanezen feltételek mellett, ha a kúpfelszínt metsző sík ellipszist határoz meg, akkor minden olyan egyenes, amely metszi az alapkör kerületét, rávetíti képét a kúpszelet síkjára, és két pontban fogja metszeni az ellipszist.

Következmény

Ha a kúpfelszínt metsző sík [parabolát határoz meg], akkor minden olyan egyenes, amely metszi az alapkör kerületét, rávetíti képét a kúpszelt síkjára. Ha a metsző egyenes nem halad keresztül a kép nélküli ponton, akkor az egyenes képe a vászon síkján két pontban fogja metszeni a parabolát, ám ha a metsző egyenes áthalad a kép nélküli ponton, akkor ennek az egyenesnek a képe párhuzamos lesz a sugárral, és egy pontban fogja metszeni a parabolát.

Következmény

Ha a kúpfelszínt metsző sík hiperbolát határoz meg, akkor minden olyan egyenes, amely metszi az alapkör kerületét, és amely nem halad át a két képnélküli pont egyikén sem, rávetíti képét a kúpszelet síkjára, és ez két pontban fogja metszeni a hiperbolát. Ám ha az egyenes áthalad az egyik vagy a másik képnélküli ponton, akkor annak képe metszeni fogja a hiperbolát, és egy pontban metszeni fogja a háromszöget. Végül, ha ez az egyenes mindkét képnélküli ponton áthalad, akkor ennek az egyenesnek a képe nem lesz rajta a kúpszelet síkján, hacsak végtelen távolságban nem.

Következmény

Ugyanezen feltételek mellett, ha a vászon síkja ellipszist határoz meg, az alapkörhöz húzott minden érintő rávetíti képét a vászon síkjára, és ott egy pontban érinteni fogja az ellipszist véges távolságban.

Következmény

Ha a vászon síkja parabolát határoz meg, az alapkörhöz húzott minden érintő, kivéve azt, amely a képnélküli ponton halad keresztül, rávetíti képét a vászon síkjára, és ott egy pontban érinteni fogja a parabolát véges távolságban, és ez a pont a kör kerületének és az érintő érintkezési pontjának képe lesz.

Megjegyzés

Van tehát a parabolán egy hiányzó pont, amely egy érintő szerepét játssza, hiszen egy érintőnek a képe.

Következmény

Ha a vászon síkja hiperbolát határoz meg, az alapkörhöz húzott minden érintő rávetíti képét a vászon síkjára, még akkor is, ha a képnélküli pontokon haladnak keresztül. És ha a kerülethez húzott érintők nem haladnak keresztül a képnélküli pontokon, akkor képük véges távolságban, egy pontban fogja érinteni a hiperbolát, ám ha a képnélküli pontokon keresztül húzunk érintőket, képük nem fogja érinteni a hiperbolát, hacsak végtelen távolságban nem, és párhuzamosak lesznek egyik vagy másik sugárral.

1. megjegyzés

Mindebből azt a következtetést kell levonni, hogy az aszimptoták hasonlatosak az érintőkhöz, és hogy azonosak a végtelen távolságban lévő érintőkkel.

2. megjegyzés

Az előzőekből azt a következtetést is levonjuk, hogy a parabolán belül számos olyan egymással párhuzamos egyenes van, amely egyetlen pontban metszi a parabolát.

3. [megjegyzés]

Azt a következtetést is levonhatjuk, hogy a hiperbolán belül két sorozatnyi egymással párhuzamos egyenes van, és hogy mindkét sorozatban van egy-egy egyenes, amely nem érinti a hiperbolát, hacsak végtelen távolságban nem, tehát a hiperbola aszimptotái. Végül evidens, hogy a parabola középen van az ellipszis és a hiperbola között, mert

(1) az ellipszisben nincsen párhuzamos vertikális, nincs hiányzó pont, egyetlen véges vonalból áll, véges teret zár körbe, és nincsenek benne párhuzamos sorozatok;

(2) a parabolában egy párhuzamos vertikális, egy hiányzó pont, egyetlen végtelen vonal, egy végtelen tér és egy párhuzamos sorozat van;

(3) a hiperbolában két párhuzamos vertikális, két hiányzó pont van, két végtelen vonalból, két végtelen térből és két párhuzamos sorozatból áll.

Fordította: Pavlovits Tamás